เทคนิคการหาปริพันธ์ บทที่ 5

Techniques of Integration

การหาปริพันธ์ในบางโจทย์ไม่สามารถใช้สูตรที่มีอยู่ในรูปแบบของการหาปริพันธ์แบบสูตรพื้นฐานทั่วไปได้ จึงจำเป็นจะต้องทำการเปลี่ยนรูปหรือแปลงโจทย์ก่อนการใช้สูตร โดยวิธีการนี้จะเรียกว่า เทคนิคการหาปริพันธ์

จุดมุ่งหมายการเรียนรู้

1. สามารถเลือกใช้วิธีเทคนิคการหาปริพันธ์ที่เหมาะสมกับโจทย์ได้
2. สามารถหาค่าปริพันธ์ได้จากเทคนิคการหาปริพันธ์
3. สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้อย่างถูกต้อง

5.1 การหาปริพันธ์โดยการแยกทีละส่วน (Integration by parts)

วิธีนี้เป็นการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปแบบของผลคูณ 2 ฟังก์ชัน เช่น การหาปริพันธ์ในลักษณะดังกล่าว จะทำได้ก็ต่อเมื่อและเป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้จาก

$$d(uv) = udv + vdu$$

$$udv = d(uv) - vdu$$

ทำการปริพันธ์ทั้ง 2 ข้าง จะได้

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu$$

$$\boxed{\therefore \int udv = uv - \int vdu}$$

การหาปริพันธ์โดยใช้สูตรนี้ได้โดย แบ่งเป็นฟังก์ชันออกเป็น 2 ส่วน คือ u และ dv

1. ทำการเลือก dv ก่อน โดยฟังก์ชันจะต้องเป็นฟังก์ชันที่ดูซับซ้อนหรือยุ่งยาก แต่จะต้องสามารถหาปริพันธ์ได้ เนื่องจากจะต้องนำ dv ไปทำการหาปริพันธ์ เพื่อให้ได้ v มา แล้วจึงนำไปแทนค่าทางด้านขวามือของสูตร ซึ่งฟังก์ชันที่เลือกจะต้องติดค่า dx ไปด้วยเสมอเพื่อรองรับในการหาปริพันธ์

2. ส่วนที่เหลือ คือ u โดยนำไปหาค่า du เพื่อแทนสูตรทางด้านขวามือ
3. ถ้าส่วนของ $\int vdu$ ไม่สามารถหาคำตอบได้ ให้ทำการหาปริพันธ์โดยการแยกทีละส่วนซ้ำต่อไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะได้คำตอบ หรือมีพจน์ที่ได้จากการทำเหมือนทางด้านซ้ายมือ
4. ย้ายพจน์ $\int vdu$ ไปด้านซ้ายมือแล้วแก้สมการแทนค่าหาคำตอบ

ตัวอย่าง 5.1 จงหาค่า $\int x \ln x dx$

<u>วิธีทำ</u> เลือก dv ที่ซับซ้อนแต่สามารถหาปริพันธ์ได้

ถ้าให้ $dv = \ln x\, dx$ เพื่อทำการหา $v = \int dv = \int \ln x\, dx$ ซึ่ง $\int \ln x\, dx$ ไม่สามารถหาปริพันธ์ได้ ถึงแม้ว่าจะเป็นฟังก์ชันที่ซับซ้อน จึงจำเป็นจะต้องเลือก dv ใหม่ คือ

$$dv = x\,dx \quad \text{นำไปหาค่า} \quad v = \int dv = \int x dx = \frac{x^2}{2}$$

$$u = \ln x \quad \text{นำไปหาค่า} \quad du = d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$$

จาก

$$\int x \ln x\, dx = \int \overset{u}{(\ln x)}\,\overset{dv}{(x\, dx)}$$

$$= \overset{u}{(\ln x)}\,\overset{v}{\frac{x^2}{2}} - \overset{-}{\int} \overset{v}{\frac{x^2}{2}}\overset{du}{\left(\frac{1}{x}\right)dx}$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2}\right) + c$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c$$

ตัวอย่าง 5.2 จงหาค่า $\int x^2 \cos 4x\, dx$

<u>วิธีทำ</u> เลือก $dv = \cos\ 4x\, dx$ นำไปหาค่า $v = \int dv = \int \cos 4x\, dx$

$$= \int \cos 4x \frac{d(4x)}{4} = \frac{1}{4}\sin 4x$$

$u = x^2$ นำไปหาค่า $du = d\left(x^2\right) = 2x\, dx$

$$\int u\ dv = u\ v - \int v\ du$$

จาก $$\int x^2 \cos 4x\, dx = x^2\left(\frac{1}{4}\right)\sin 4x - \int \frac{1}{4}(\sin 4x)(2x)\, dx$$

$$= \frac{x^2}{4}\sin 4x - \frac{1}{2}\boxed{\int x \sin 4x\, dx}^{*} \qquad (1)$$

เนื่องจาก $\int x \sin 4x\, dx$ ยังไม่สามารถหาคำตอบได้ ดังนั้นจะต้องนำไปหาปริพันธ์โดยแยกทีละส่วนซ้ำ

เลือก $dv = \sin\ 4x\, dx$ นำไปหาค่า $v = \int dv = \int \sin 4x\, dx$

$$= \int \sin 4x \frac{d(4x)}{4} = -\frac{1}{4}\cos 4x$$

$u = x$ นำไปหาค่า $du = dx$

$$\int u\ dv = u\ v - \int v\ du$$

จาก * $$\int x \sin 4x\, dx = x\left(-\frac{1}{4}\cos 4x\right) - \int\left(-\frac{1}{4}\cos 4x\right)dx$$

$$= -\frac{x}{4}\cos 4x + \frac{1}{4}\sin 4x + c$$

นำคำตอบที่ได้ไปแทนค่าในสมการที่ (1)

$$\int x^2 \cos 4x\, dx = \frac{x^2}{4}\sin 4x - \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{4}\cos 4x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + c$$

$$= \frac{x^2}{4}\sin 4x + \frac{x}{8}\cos 4x - \frac{1}{8}\sin 4x + c$$

ตัวอย่าง 5.3 จงหาค่า $\int arc\cot x\,dx$

<u>วิธีทำ</u> เลือก $dv = arc\cot x\,dx$ นำไปหาค่า $v = \int dv = \int arc\cot x\,dx$

ซึ่ง $\int arc\cot x\,dx$ ไม่สามารถหาปริพันธ์ได้ ถึงแม้ว่าจะเป็นฟังก์ชันที่ซับซ้อน จึงจำเป็นจะต้องเลือก dv ใหม่ คือ $dv = dx$ นำไปหาค่า $v = \int dv = \int dx = x$

$u = arc\cot x$ นำไปหาค่า $du = d\left(arc\cot x\right) = -\dfrac{1}{1+x^2}dx$

$$\int arc\cot x\,dx = \int \overset{u}{(arc\cot x)}\overset{dv}{dx}$$

$$\int arc\cot x\,dx = \overset{u}{(arc\cot x)}\overset{v}{x} - \int \overset{v}{x}\overset{du}{\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)dx}$$

$$= x\,arc\cot x + \int \frac{x}{1+x^2}dx$$

$$= x\,arc\cot x + \int \frac{1}{\left(x^2+1\right)}\frac{d\left(x^2+1\right)}{2}$$

$$= x\,arc\cot x + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + c$$

ตัวอย่าง 5.4 จงหาค่า $\int xe^{2x}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> เลือก $dv = e^{2x}\,dx$ นำไปหาค่า $v = \int dv = \int e^{2x}\,dx = \int e^{2x}\dfrac{d(2x)}{2} = \dfrac{1}{2}e^{2x}$

$u = x$ นำไปหาค่า $du = dx$

$$\int \overset{u}{x}\overset{dv}{e^{2x}\,dx} = \overset{u}{x}\overset{v}{\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)} - \int \overset{v}{\frac{1}{2}e^{2x}}\overset{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\frac{d(2x)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c$$

<u>การหาปริพันธ์โดยการแยกทีละส่วนด้วยวิธีลัด</u> ตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. สร้างตารางโดยให้ u อยู่ด้านซ้ายมือ เพื่อทำการหาอนุพันธ์ และให้ dv อยู่ด้านขวามือของตาราง เพื่อทำการหาปริพันธ์

u เพื่อหาอนุพันธ์ (D)	dv เพื่อหาปริพนธ์ (I)

โดยที่ D หมายถึง Differential หรือ การหาอนุพันธ์

I หมายถึง Integrate หรือ การหาปริพันธ์

2. เลือก dv ที่เป็นฟังก์ชันซับซ้อนแต่จะต้องสามารถหาปริพันธ์ได้ และ u คือ ส่วนที่เหลือจากการเลือก dv เพื่อนำไปหาอนุพันธ์ได้
3. หาอนุพันธ์ด้านซ้ายมือจนมีค่าเท่ากับศูนย์
4. ทำการหาปริพันธ์จาก dv ทางด้านขวามือ เพื่อให้ได้ค่า v
5. คูณทแยงจากบรรทัดแรกทางด้านซ้ายมือไปสู่บรรทัดที่สองของด้านขวามือในบรรทัดที่ 2 และทเช่นนี้ต่อไปจนสุดบรรทัดของทางด้านขวามือ
6. ผลจากการคูณทแยงในครั้งที่ 1 ด้วยเครื่องหมาย + ครั้งที่ 2 ด้วยเครื่องหมาย – สลับกันไป กล่าวได้ คือ การคูณเครื่องหมายในการคูณกระทำกันของครั้งที่คี่ (หรือครั้งที่ 1, 3, 5,…) เป็นเครื่องหมาย + และครั้งที่คู่ (หรือครั้งที่ 2, 4, 6,…) เป็นเครื่องหมาย -

ตัวอย่าง 5.5 จากตัวอย่าง 5.4 จงหาค่า $\int xe^{2x}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> เลือก $dv = e^{2x}\,dx$ และ $u = x$ สร้างตารางได้ดังนี้

u (เพื่อ D)	dv (เพื่อ I)
x	e^{2x}
1	$\frac{e^{2x}}{2}$
0	$\frac{e^{2x}}{4}$

ดังนั้น
$$\int xe^{2x}\,dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + c$$
$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c$$

ซึ่งจะได้คำตอบเช่นเดียวกับตัวอย่าง 5.4 โดยใช้วิธีการหาปริพันธ์โดยการแยกทีละส่วน

ตัวอย่าง 5.6 จงหาค่า $\int (x^2+1)\sin 2x\,dx$

<u>วิธีทำ</u> เลือก $dv = \sin 2x\,dx$ และ $u = x^2+1$ สร้างตารางได้ดังนี้

u (เพื่อ D)	dv (เพื่อ I)
x^2+1	$\sin 2x$
$2x$	$-\frac{\cos 2x}{2}$
2	$-\frac{\sin 2x}{4}$
0	$\frac{\cos 2x}{8}$

ดังนั้น
$$\int (x^2+1)\sin 2x\,dx = (x^2+1)\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) - 2x\left(-\frac{\sin 2x}{4}\right) + 2\left(\frac{\cos 2x}{8}\right) + c$$
$$= -\frac{x^2+1}{2}(\cos 2x) - \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + c$$

ตัวอย่าง 5.7 จงหาค่า $\int x^3 \cos x\,dx$

<u>วิธีทำ</u> เลือก $dv = \cos x\,dx$ และ $u = x^3$ สร้างตารางได้ดังนี้

u (เพื่อ D)	dv (เพื่อ I)
x^3	$\cos x$
$3x^2$	$\sin x$
$6x$	$-\cos x$
6	$-\sin x$
0	$\cos x$

$$\int x^3 \cos x\,dx = x^3 \sin x - 3x^2(-\cos x) + 6x(-\sin x) - 6\cos x + c$$

$$= x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6\cos x + c$$

<u>ข้อสังเกต</u> ในการทำด้วยวิธีลัดนี้ ในการเลือก u ควรจะต้องเป็นฟังก์ชันพหุนาม (หรือที่ติดอยู่ในรูปตัวแปร x) เนื่องจากเมื่อทำการหาอนุพันธ์ไปจนท้ายสุดจะมีค่าเท่ากับศูนย์ ส่วน dv ควรจะเป็นฟังก์ชันที่สามารถหาปริพันธ์ได้ และเป็นฟังก์ชันในรูปของ sin, cos หรือ e

ตารางแบบวิธีลัดที่ 1

u (เพื่อ D)	dv (เพื่อ I)
ฟังก์ชันพหุนามตัวแปร x	e หรือ sin หรือ cos

ตัวอย่าง 5.8 จงหาค่า $\int e^x \cos 2x\, dx$

ทั้งวิธีปกติของการหาปริพันธ์โดยการแยกทีละส่วนและวิธีลัด

<u>วิธีทำ</u> **วิธีปกติ** เลือก $dv = \cos 2x\, dx$ นำไปหาค่า $v = \int dv$

$$= \int \cos 2x\, dx$$

$$= \int \cos 2x\, d\frac{(2x)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x$$

$u = e^x$ นำไปหาค่า $du = e^x dx$

$$\int u \quad dv \quad = \quad u \quad v \quad - \int \quad v \quad du$$

$$\int e^x \cos 2x\, dx = e^x\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) - \int \frac{1}{2}\sin 2x\,(e^x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}e^x \sin 2x - \frac{1}{2}\boxed{\int e^x \sin 2x\, dx}$$

เนื่องจาก $\int e^x \sin 2x\, dx$ ยังไม่สามารถหาคำตอบได้ ดังนั้นจะต้องนำไปหาปริพันธ์โดยแยกทีละส่วนซ้ำ

เลือก $dv = \sin 2x\, dx$ นำไปหาค่า $v = \int dv = \int \sin 2x\, dx$

$$= \int \sin 2x\, d\frac{(2x)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 2x d(2x)$$

$$= \frac{1}{2}(-\cos 2x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

$u = e^x$ นำไปหาค่า $du = d(e^x) = e^x\, dx$

$$\int u \quad dv \quad = \quad u \quad v \quad - \int \quad v \quad du$$

$$\int e^x \sin 2x\, dx = e^x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) - \int -\frac{1}{2}\cos 2x\,(e^x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^x \cos 2x + \frac{1}{2}\int e^x \cos 2x\, dx$$

นำไปแทนค่าในสมการที่ (1)

$$\begin{aligned}\int e^x \cos 2x\,dx &= \frac{1}{2}e^x \sin 2x - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^x \cos 2x + \frac{1}{2}\int e^x \cos 2x\,dx\right)\\ &= \frac{1}{2}e^x \sin 2x + \frac{1}{4}e^x \cos 2x - \frac{1}{4}\int e^x \cos 2x\,dx\end{aligned}$$

$$\int e^x \cos 2x\,dx + \frac{1}{4}\int e^x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^x \sin 2x + \frac{1}{4}e^x \cos 2x$$

$$\frac{4}{4}\int e^x \cos 2x\,dx + \frac{1}{4}\int e^x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^x \sin 2x + \frac{1}{4}e^x \cos 2x$$

$$\frac{5}{4}\int e^x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^x \sin 2x + \frac{1}{4}e^x \cos 2x$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \int e^x \cos 2x\,dx &= \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}e^x \sin 2x + \frac{1}{4}e^x \cos 2x\right)\\ &= \frac{2}{5}e^x \sin 2x + \frac{1}{5}e^x \cos 2x + c\end{aligned}$$

วิธีลัด

เลือก dv ที่ดูเป็นฟังก์ชันซับซ้อนหรือดูยุ่งยากกว่า $dv = \cos 2x dx$ และ $u = e^x$ สร้างตารางได้ ดังนี้

u (เพื่อ D)	dv (เพื่อ I)
e^x	$\cos 2x$
e^x	$\frac{\sin 2x}{2}$
e^x	$-\frac{\cos 2x}{4}$

จะเห็นได้ว่าทางด้านซ้ายมือของการหาอนุพันธ์จะไม่มีทางเป็นไปได้ ที่มีค่าเท่ากับศูนย์ ถ้าเกิดในกรณีเช่นนี้

1. ให้ทำการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันทางด้านขวามือจนได้ฟังก์ชันที่ซ้ำเดิมเหมือนโจทย์ กล่าวคือ ทำการหาค่าอนุพันธ์และปริพันธ์เพียง 2 ครั้งเท่านั้น ทางด้านขวามือก็จะให้ค่าซ้ำเช่นเดียวกับโจทย์
2. เพิ่มผลคูณโดยวนกลับจากผลลัพธ์ของการหาปริพันธ์ในขั้นสุดท้ายและทำการวนกลับไปทางด้านขวามือของบรรทัดสุดท้ายเช่นเดียวกัน แต่ต้องมีเครื่องหมาย $+\int \ldots dx$ ไปด้วย แล้วหาผลลัพธ์เป็นคำตอบ

u (เพื่อ D)	dv (เพื่อ I)
e^x	$\cos 2x$
e^x	$\oplus$ $\dfrac{\sin 2x}{2}$
e^x	$\ominus$ $-\dfrac{\cos 2x}{4}$

$\oplus$ $\int \ldots dx$

หยุดหาปริพันธ์เพราะได้ฟังก์ชันซ้ำเดียวกับโจทย์ที่ให้

ดังนั้น
$$\int e^x \cos 2x\,dx = \frac{e^x \sin 2x}{2} - e^x\left(\frac{-\cos 2x}{2}\right) + \int e^x\left(\frac{-\cos 2x}{4}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}e^x \sin 2x + \frac{1}{4}e^x \cos 2x - \frac{1}{4}\int e^x \cos 2x\,dx$$

$$\int e^x \cos 2x\,dx + \frac{1}{4}\int e^x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^x \sin 2x + \frac{1}{4}e^x \cos 2x$$

$$\int e^x \cos 2x\,dx = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}e^x \sin 2x + \frac{1}{4}e^x \cos 2x\right)$$
$$= \frac{2}{5}e^x \sin 2x + \frac{1}{4}e^x \cos 2x + c$$

<u>ข้อสังเกต</u> ในการทำด้วยวิธีลัดนี้ ในการเลือก u ควรจะต้องเป็นฟังก์ชัน e ส่วน dv ควรจะเป็นฟังก์ชันที่สามารถหาปริพันธ์ได้ และเป็นฟังก์ชันในรูปของ $\sin$, $\cos$ หรือ e สรุปได้ดังนี้

ตารางแบบวิธีลัดที่ 2

u (เพื่อ D)	dv (เพื่อ I)
e	sin หรือ cos

5.2 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่มีรูปแบบแน่นอน

(Integrals involving trigonometric functions)

การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยปกติทั่วไปทั้งที่อยู่ในรูปแบบของการยกกำลัง ซึ่งเราไม่สามารถนำสูตรปริพันธ์พื้นฐานมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้ จึงจำเป็นต้องใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติเบื้องต้นช่วยในการแปลงรูปแบบของการหาปริพันธ์ เพื่อให้ใช้สูตรพื้นฐานในการหาปริพันธ์ได้ โดยจะพิจารณาการหาปริพันธ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็น 4 รูปแบบ ดังนี้

1. $\int \sin^m u\,du$, $\int \cos^n u\,du$ และ $\int \sin^m u \cos^n u\,du$
2. $\int \sin u \cos v\,dx$, $\int \sin u \sin v\,dx$ และ $\int \cos u \cos v\,dx$
3. $\int \tan^n u\,du$ และ $\int \cot^n u\,du$
4. $\int \sec^n u\,du$ และ $\int \operatorname{cosec}^n u\,du$

   $\int \tan^m u \sec^n u\,du$ และ $\int \cot^m u \operatorname{cosec}^n u\,du$

โดยที่ฟังก์ชัน u และ v เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x

5.2.1 การหาปริพันธ์ในรูปแบบ $\int \sin^m u\,du$, $\int \cos^n u\,du$ และ $\int \sin^m u \cos^n u\,du$

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้า m และ n เป็นจำนวนคู่บวก ให้ใช้สูตรตรีโกณมิติเบื้องต้นในการแปลง คือ

$$\boxed{\sin^2 u = \frac{1}{2}(1-\cos 2u) \text{ หรือ } \cos^2 u = \frac{1}{2}(1+\cos 2u)}$$

<u>กรณีที่ 2</u> ถ้า m และ n เป็นจำนวนคี่บวก (อีกจำนวนหนึ่งเป็นจำนวนจริงอะไรก็ได้)

- ถ้า m เป็นจำนวนคี่บวก คือ เลขชี้กำลังของ $\sin u$ ให้แปลงจาก $\sin^m u = \sin^{m-1} u \cdot \sin u$ แล้วใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ $\sin^2 u = 1 - \cos^2 u$
- ถ้า n เป็นจำนวนคี่บวก คือ เลขชี้กำลังของ $\cos u$ ให้แปลงจาก $\cos^n u = \cos^{n-1} u \cdot \cos u$ แล้วใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ $\cos^2 u = 1 - \sin^2 u$

ตัวอย่าง 5.9 จงหาค่า $\int \sin^2 3x\,dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\int \sin^2 3x\,dx = \int \frac{1}{2}[1-\cos 2(3x)]dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 6x\right)dx$$

$$= \int \frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}\int \cos 6x\,dx$$

$$= \int \frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}\int \cos 6x\,\frac{d(6x)}{6}$$

$$\int \sin^2 3x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\int \cos 6x\,d(6x)$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + c$$

ตัวอย่าง 5.10 จงหาค่า $\int \frac{\cos^4 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\int \frac{\cos^4 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\cos^4 \sqrt{x}dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\cos^2 \sqrt{x}\right)^2 dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\left(1+\cos 2\sqrt{x}\right)\right)^2 dx$$

$$\int \frac{\cos^4 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} \ \frac{1}{4}\left(1+\cos 2\sqrt{x}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{x}} \left(1+2\cos 2\sqrt{x}+\cos^2 2\sqrt{x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2\cos 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{\cos^2 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx+\frac{1}{2}\int \frac{2\cos 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx+\frac{1}{4}\int \frac{\cos^2 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

$$= \frac{1}{4}\int x^{-\frac{1}{2}}dx+\frac{1}{2}\int 2\cos 2\sqrt{x}\, d\left(2\sqrt{x}\right)+\frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{x}}\cos^2 2\sqrt{x}dx$$

$$= \frac{1}{4} \ \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\sin 2\sqrt{x}+\frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{x}} \ \frac{1}{2}\left(1+\cos 4\sqrt{x}\right)dx$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{2}\sin 2\sqrt{x}+\frac{1}{8}\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\cos 4\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)dx$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{2}\sin 2\sqrt{x}+\frac{1}{8}\int x^{-\frac{1}{2}}dx+\frac{1}{8}\int \frac{\cos 4\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{2}\sin 2\sqrt{x}+\frac{1}{8}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{8}\int \cos 4\sqrt{x}\,\frac{d\left(4\sqrt{x}\right)}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{2}\sin 2\sqrt{x}+\frac{1}{4}\sqrt{x}+\frac{1}{16}\sin 4\sqrt{x}+c$$

ตัวอย่าง 5.11 จงหาค่า $\int \sin^4 x\cos^2 x dx$

<u>วิธีทำ</u> $\int \sin^4 x\cos^2 x dx = \int \left(\sin^2 x\right)^2 \cos^2 x dx$

$$= \int \left(\frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right)\right)^2 \left(\frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right)\right)dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{4}\left(1-\cos 2x\right)^2\right) \ \frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right)dx$$

$$\int \sin^4 x\cos^2 x dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)^2(1+\cos 2x)dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)(1+\cos 2x)dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (\cos^3 2x-\cos^2 2x+\cos 2x+1)dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \cos^3 2xdx-\frac{1}{8}\int \cos^2 2xdx+\frac{1}{8}\int \cos 2xdx+\frac{1}{8}\int 1dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \cos^2 2x\cos 2xdx-\frac{1}{8}\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)dx+\frac{1}{8}\int \cos 2xdx+\frac{1}{8}x$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\sin^2 2x)\cos 2xdx-\frac{1}{16}\int (1+\cos 4x)dx+\frac{1}{8}\int \cos 2x\frac{d(2x)}{2}+\frac{1}{8}x$$

$$= \frac{1}{8}\int (\cos 2x-\sin^2 2x\ \ \cos 2x)dx-\frac{1}{16}\int (1)dx-\frac{1}{16}\int \cos 4xdx+\frac{1}{16}\int \cos 2x\ \ d(2x)+\frac{1}{8}x$$

$$= \frac{1}{8}\int \cos 2xdx-\frac{1}{8}\int \sin^2 2x\ \ \cos 2xdx-\frac{1}{16}x-\frac{1}{16}\int \cos 4x\frac{d(4x)}{4}+\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{1}{8}x$$

$$= \frac{1}{8}\int \cos 2x\frac{d(2x)}{2}-\frac{1}{8}\int (\sin 2x)^2\ \ \frac{d(\sin 2x)}{2}-\frac{x}{16}-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{x}{8}$$

$$= \frac{1}{16}\sin 2x-\frac{1}{16}\frac{(\sin 2x)^3}{3}-\frac{x}{16}-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{x}{8}$$

$$= \frac{1}{16}\sin 2x-\frac{1}{48}\sin^3 2x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{x}{16}+c$$

$$= -\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+\frac{x}{16}+c$$

ตัวอย่าง 5.12 จงหาค่า $\int e^x \sin^3 e^x dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\int e^x \sin^3 e^x dx = \int e^x \sin^2 e^x \sin e^x dx$$

$$= \int e^x(1-\cos^2 e^x)\sin e^x dx$$

$$\int e^x \sin^3 e^x dx = \int \left(1-\cos^2 e^x\right)\frac{d\left(\cos e^x\right)}{-1}$$

$$= -\int \left(1-\cos^2 e^x\right)d\left(\cos e^x\right)$$

$$= -\int 1d\left(\cos e^x\right)+\int \left(\cos e^x\right)^2 d\left(\cos e^x\right)$$

$$= -\cos e^x + \frac{\left(\cos e^x\right)^3}{3} + c$$

$$= -\cos e^x + \frac{1}{3}\cos^3 e^x + c$$

ตัวอย่าง 5.13 จงหาค่า $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x dx$$

$$= \int \sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)\cos x dx$$

$$= \int \left(\sin^2 x - \sin^4 x\right)d\left(\sin x\right)$$

$$= \int \left(\sin^2 x\right)d\left(\sin x\right) - \int \left(\sin^4 x\right)d\left(\sin x\right)$$

$$= \frac{\left(\sin x\right)^3}{3} - \frac{\left(\sin x\right)^5}{5} + c$$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + c$$

ตัวอย่าง 5.14 จงหาค่า $\int \sin^5 x \cos^{-3} x dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\int \sin^5 x \cos^{-3} x dx = \int \sin^4 x \sin x \cos^{-3} x dx$$

$$= \int \left(\sin^2 x\right)^2 \sin x \cos^{-3} x dx$$

$$= \int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \sin x \cos^{-3} x dx$$

$$= \int \left(1-2\cos^2 x + \cos^4 x\right)\cos^{-3} x \ \sin x dx$$

$$= \int \left(\cos^{-3} x - 2\cos^{-1} x + \cos x\right) \sin x dx$$

$$= \int \left((\cos x)^{-3} - \frac{1}{\cos x} + \cos x \right) \frac{d(\cos x)}{-1}$$

$$= -\int \left((\cos x)^{-3} - \frac{1}{\cos x} + \cos x \right) d(\cos x)$$

$$= -\left(\frac{(\cos x)^{-2}}{-2} - \ln|\cos x| - \frac{(\cos x)^2}{2} \right) + c$$

$$= (\cos x)^{-2} + \ln|\cos x| + \frac{\cos^2 x}{2} + c$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} + \ln|\cos x| + \frac{1}{2}\cos^2 x + c$$

5.2.2 การหาปริพันธ์ในรูปแบบ $\int \sin u \cos v dx$, $\int \sin u \sin v dx$ และ $\int \cos u \cos v dx$ โดยใช้สูตรตรีโกณมิติเบื้องต้นในการแปลง คือ

1. $\sin u \cos v = \frac{1}{2}[\sin(u+v) + \sin(u-v)]$
2. $\sin u \sin v = -\frac{1}{2}[\cos(u+v) - \cos(u-v)]$
3. $\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u+v) + \cos(u-v)]$

เมื่อใช้สูตรตรีโกณมิติเบื้องต้นในการแปลงเรียบร้อยแล้ว ให้ทำการกระจายของการหาปริพันธ์ และใช้สูตร $\int \sin u du$ หรือ $\int \cos u du$ ในการหาค่า

ตัวอย่าง 5.15 จงหาค่า $\int \sin 4x \cos 3x dx$

<u>วิธีทำ</u> แปลง $\sin 4x \cos 3x$ จากสูตรตรีโกณมิติเบื้องต้น

$$\sin u \cos v = \frac{1}{2}[\sin(u+v) + \sin(u-v)]$$

$$\therefore \sin 4x \cos 3x = \frac{1}{2}[\sin(4x+3x) + \sin(4x-3x)]$$

$$= \frac{1}{2}[\sin 7x + \sin x]$$

$$\int \sin 4x \cos 3x dx = \int \frac{1}{2}(\sin 7x + \sin x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 7x dx + \frac{1}{2}\int \sin x dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 7x \frac{d(7x)}{7} + \frac{1}{2}\int \sin x dx$$

$$= \frac{1}{14}\int \sin 7x \, d(7x) + \frac{1}{2}\int \sin x dx$$

$$= \frac{1}{14}(-\cos 7x) + \frac{1}{2}(-\cos x) + c$$

$$= -\frac{1}{14}\cos 7x - \frac{1}{2}\cos x + c$$

ตัวอย่าง 5.16 จงหาค่า $\int e^x \sin 5e^x \sin 2e^x dx$

<u>วิธีทำ</u> แปลง $\sin 5e^x \sin 2e^x$ จากสูตรตรีโกณมิติเบื้องต้น

$$\sin u \sin v = -\frac{1}{2}[\cos(u+v) - \cos(u-v)]$$

$$\therefore \sin 5e^x \sin 2e^x = -\frac{1}{2}\left[\cos(5e^x + 2e^x) - \cos(5e^x - 2e^x)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\cos 7e^x - \cos 3e^x\right]$$

$$\int e^x \sin 5e^x \sin 2e^x dx = \int e^x\left(-\frac{1}{2}(\cos 7e^x - \cos 3e^x)\right)dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int (\cos 7e^x)e^x dx + \frac{1}{2}\int (\cos 3e^x)e^x dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \cos 7e^x \frac{d(7e^x)}{7} + \frac{1}{2}\int \cos 3e^x \frac{d(3e^x)}{3}$$

$$= -\frac{1}{14}\sin 7e^x + \frac{1}{6}\sin 3e^x + c$$

ตัวอย่าง 5.17 จงหาค่า $\int \frac{\cos(6\ln x)\ \cos(\ln x)}{x}dx$

<u>วิธีทำ</u> แปลง $\cos(6\ln x)\ \cos(\ln x)$ จากสูตรตรีโกณมิติเบื้องต้น

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u+v)+\cos(u-v)]$$

$$\therefore \cos(6\ln x)\ \cos(\ln x) = \frac{1}{2}[\cos(6\ln x+\ln x)+\cos(6\ln x-\ln x)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos(7\ln x)+\cos(5\ln x)]$$

$$\int \frac{\cos(6\ln x)\ \cos(\ln x)}{x}dx = \int \frac{1}{2}[\cos(7\ln x)+\cos(5\ln x)]\frac{dx}{x}$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos(7\ln x)\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}\int \cos(5\ln x)\frac{dx}{x}$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos(7\ln x)\frac{d(7\ln x)}{7}+\frac{1}{2}\int \cos(5\ln x)\frac{d(5\ln x)}{5}$$

$$= \frac{1}{14}\sin(7\ln x)+\frac{1}{10}\sin(5\ln x)+c$$

5.2.3 การหาปริพันธ์ในรูปแบบ $\int \tan^n u du$ และ $\int \cot^n u du$

เมื่อ n คือ จำนวนเต็มบวก โดยที่ $n > 2$

<u>กรณีที่ 1</u> ในการหา $\int \tan^n u du$ ให้แยก $\tan^n u = \tan^{n-2} u\ \tan^2 u$ โดยใช้สูตรตรีโกณมิติเบื้องต้นในการแปลง คือ $\tan^2 u = \sec^2 u - 1$ ทำการกระจายของการหาปริพันธ์ และใช้หลักการหา $d(\tan u) = \sec^2 u du$

<u>กรณีที่ 2</u> ในการหา $\int \cot^n u du$ ให้แยก $\cot^n u = \cot^{n-2} u\ \cot^2 u$ โดยใช้สูตรตรีโกณมิติเบื้องต้นในการแปลง คือ $\cot^2 u = \cos ec^2 u - 1$ ทำการกระจายของการหาปริพันธ์ และใช้หลักการหา $d(\cot u) = -\cos ec^2 u du$

ตัวอย่าง 5.18 จงหาค่า $\int e^x \tan^3 e^x dx$

<u>วิธีทำ</u> แยก $\tan^n u = \tan^{n-2} u \ \ \tan^2 u$

$$\tan^3 e^x = \tan e^x \ \ \tan^2 e^x \qquad (1)$$

ทำการแปลง $\tan^2 e^x$ จากสูตรตรีโกณมิติเบื้องต้น

$$\tan^2 u = \sec^2 u - 1$$

$$\tan^2 e^x = \sec^2 e^x - 1$$

จากสมการที่ (1) ดังนั้น $\tan^3 e^x = \tan e^x \ \ \left(\sec^2 e^x - 1\right)$

$$= \tan e^x \ \ \sec^2 e^x - \tan e^x$$

$$\begin{aligned}
\int e^x \tan^3 e^x dx &= \int \left(\tan e^x \ \ \sec^2 e^x - \tan e^x\right) e^x dx \\
&= \int \left(\tan e^x\right)\left(\sec^2 e^x\right) e^x dx - \int \left(\tan e^x\right) e^x dx \\
&= \int \left(\tan e^x\right) d\left(\tan e^x\right) - \int \left(\tan e^x\right) d\left(e^x\right) \\
&= \frac{\left(\tan e^x\right)^2}{2} - \ln\left|\sec e^x\right| + c \\
&= \frac{1}{2}\tan^2 e^x - \ln\left|\sec e^x\right| + c
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.19 จงหาค่า $\int \cot^4 3x dx$

<u>วิธีทำ</u> แยก $\cot^n u = \cot^{n-2} u \ \ \cot^2 u$

$$\cot^4 3x = \cot^2 3x \ \ \cot^2 3x \qquad (1)$$

ทำการแปลง $\cot^2 3x$ จากสูตรตรีโกณมิติเบื้องต้น

$$\cot^2 u = \operatorname{cosec}^2 u - 1$$

$$\cot^2 3x = \operatorname{cosec}^2 3x - 1$$

จากสมการที่ (1) ดังนั้น $\cot^4 3x = \cot^2 3x \ \ \left(\operatorname{cosec}^2 3x - 1\right)$

$$= \cot^2 3x \ \ \operatorname{cosec}^2 3x - \cot^2 3x$$

$$\int \cot^4 3x dx = \int \left(\cot^2 3x \ \ \operatorname{cosec}^2 3x - \cot^2 3x\right) dx$$

$$= \int \cot^2 3x \ \ \operatorname{cosec}^2 3x dx - \int \cot^2 3x dx$$

$$= \int (\cot 3x)^2 \frac{d(\cot 3x)}{-3} - \int \left(\operatorname{cosec}^2 3x - 1\right) dx$$

$$= -\frac{1}{3}\int (\cot 3x)^2 d(\cot 3x) - \int \operatorname{cosec}^2 3x \frac{d(3x)}{3} + \int 1 dx$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{(\cot 3x)^3}{3} - \frac{1}{3}(-\cot 3x) + x + c$$

$$= -\frac{1}{9}\cot^3 3x + \frac{1}{3}\cot x + x + c$$

5.2.4 การหาปริพันธ์ในรูปแบบ $\int \sec^n u du$, $\int \operatorname{cosec}^n u du$ และ $\int \tan^m u \sec^n u du$, $\int \cot^m u \operatorname{cosec}^n u du$

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้า n เป็นจำนวนคู่บวก

- ในกรณี $\sec^n u$ และ $\tan^m u \sec^n u$ ให้แยก $\sec^n u = \sec^{n-2} u \ \ \sec^2 u$ โดยใช้สูตรตรีโกณมิติเบื้องต้นในการแปลง $\sec^{n-2} u$ คือ $\boxed{\sec^2 u = 1 + \tan^2 u}$
- ในกรณี $\operatorname{cosec}^n u$ และ $\cot^m u \operatorname{cosec}^n u$ ให้แยก $\operatorname{cosec}^n u = \operatorname{cosec}^{n-2} u \ \ \operatorname{cosec}^2 u$ โดยใช้สูตรตรีโกณมิติเบื้องต้นในการแปลง $\operatorname{cosec}^{n-2} u$ คือ $\boxed{\operatorname{cosec}^2 u = 1 + \cot^2 u}$

ทั้ง 2 กรณีย่อยให้ทำการกระจายของการหาปริพันธ์ จึงสามารถใช้การหาปริพันธ์ $\int u^n du$ ได้

<u>กรณีที่ 2</u> ถ้า m เป็นจำนวนคี่บวก

- ในกรณี $\tan^m u \sec^n u$ ให้แยก $\tan^m u \sec^n u = \tan^{m-1} u \cdot \sec^{n-1} u \ \ (\tan u \ \ \sec u)$ โดยใช้สูตรตรีโกณมิติเบื้องต้นในการแปลง $\tan^{m-1} u$ คือ $\boxed{\tan^2 u = \sec^2 u - 1}$
- ในกรณี $\cot^m u \operatorname{cosec}^n u$

ให้แยก $\cot^m u \ \ \operatorname{cosec}^n u = \cot^{m-1} u \ \ \operatorname{cosec}^{n-1} u \ \ (\operatorname{cosec} u \ \ \cot u)$ โดยใช้สูตรตรีโกณมิติเบื้องต้นในการแปลง $\cot^{m-1} u$ คือ $\boxed{\cot^2 u = \operatorname{cosec}^2 u - 1}$

ทั้ง 2 กรณีย่อยให้ทำการกระจายของการหาปริพันธ์ จึงสามารถใช้การหาปริพันธ์ $\int u^n du$ ได้

ตัวอย่าง 5.20 จงหาค่า $\int \sec^4 \frac{x}{2} dx$

<u>วิธีทำ</u> แยก $\sec^n u = \sec^{n-2} u \ \sec^2 u$

$$\sec^4 \frac{x}{2} = \sec^2 \frac{x}{2} \ \sec^2 \frac{x}{2} \qquad (1)$$

ทำการแปลง $\sec^2 \frac{x}{2}$ จากสูตรตรีโกณมิติเบื้องต้น

$$\sec^2 \frac{x}{2} = 1 + \tan^2 \frac{x}{2}$$

จากสมการที่ (1) ดังนั้น $\sec^4 \frac{x}{2} = \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) \ \sec^2 \frac{x}{2}$

$$\int \sec^4 \frac{x}{2} dx = \int \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) \ \sec^2 \frac{x}{2} dx$$

$$= \int \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) \ 2d\left(\tan \frac{x}{2}\right)$$

$$= 2\int \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) d\left(\tan \frac{x}{2}\right)$$

$$= 2\int 1 d\left(\tan \frac{x}{2}\right) + 2\int \left(\tan \frac{x}{2}\right)^2 d\left(\tan \frac{x}{2}\right)$$

$$= 2\tan \frac{x}{2} + 2\frac{\left(\tan \frac{x}{2}\right)^3}{3} + c$$

$$= 2\tan \frac{x}{2} + \frac{2}{3}\tan^3 \frac{x}{2} + c$$

ตัวอย่าง 5.21 จงหาค่า $\int \operatorname{cosec}^6 2x \, dx$

<u>วิธีทำ</u> แยก $\operatorname{cosec}^n u = \operatorname{cosec}^{n-2} u \ \operatorname{cosec}^2 u$

$$\operatorname{cosec}^6 2x = \operatorname{cosec}^4 2x \ \operatorname{cosec}^2 2x \qquad (1)$$

ทำการแปลง $\operatorname{cosec}^4 2x$ จากสูตรตรีโกณมิติเบื้องต้น

$$\operatorname{cosec}^2 2x = 1 + \cot^2 2x$$

จากสมการที่ (1) ดังนั้น $\operatorname{cosec}^6 2x = \left(1 + \cot^2 2x\right) \ \operatorname{cosec}^2 2x$

$$\int \cos ec^6 2x\,dx = \int \left(1+\cot^2 2x\right)\cdot \cos ec^2 2x dx$$

$$= \int \left(1+2\cot^2 2x+\cot^4 2x\right)\frac{d(\cot 2x)}{-2}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \left(1+2\cot^2 2x+\cot^4 2x\right)d(\cot 2x)$$

$$= -\frac{1}{2}\int 1d(\cot 2x)-\int (\cot 2x)^2 d(\cot 2x)-\frac{1}{2}\int (\cot 2x)^4 d(\cot 2x)$$

$$= -\frac{1}{2}\cot 2x-\frac{(\cot 2x)^3}{3}-\frac{1}{2}\frac{(\cot 2x)^5}{5}+c$$

$$= -\frac{1}{2}\cot 2x-\frac{1}{3}\cot^3 2x-\frac{1}{10}\cot^5 2x+c$$

ตัวอย่าง 5.22 จงหาค่า $\int \tan^{\frac{3}{2}} x \sec^6 x dx$

<u>วิธีทำ</u> แยก $\sec^n u = \sec^{n-2} u \;\; \sec^2 u$

$$\sec^6 x = \sec^4 x \;\; \sec^2 x \qquad (1)$$

ทำการแปลง $\sec^4 x$ จากสูตรตรีโกณมิติเบื้องต้น

$$\sec^2 x = 1+\tan^2 x$$

จากสมการที่ (1) ดังนั้น $\sec^6 2x = \left(1+\tan^2 x\right)^2 \;\; \sec^2 x$

$$\int \tan^{\frac{3}{2}} x \sec^6 x dx = \int \tan^{\frac{3}{2}} x\left(1+\tan^2 x\right)^2 \;\; \sec^2 x dx$$

$$= \int \tan^{\frac{3}{2}} x\left(1+2\tan^2 x+\tan^4 x\right)\sec^2 x dx$$

$$= \int \left(\tan^{\frac{3}{2}} x+2\tan^{\frac{7}{2}} x+\tan^{\frac{11}{2}} x\right)d(\tan x)$$

$$= \int (\tan x)^{\frac{3}{2}} d(\tan x)+2\int (\tan x)^{\frac{7}{2}} d(\tan x)+\int (\tan x)^{\frac{11}{2}} d(\tan x)$$

$$= \frac{(\tan x)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+2\frac{(\tan x)^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}}+\frac{(\tan x)^{\frac{13}{2}}}{\frac{13}{2}}+c$$

$$= \frac{5}{2}\tan^{\frac{5}{2}} x+\frac{4}{9}\tan^{\frac{9}{2}} x+\frac{2}{13}\tan^{\frac{13}{2}} x+c$$

ตัวอย่าง 5.23 จงหาค่า $\int \frac{\cot^3\sqrt{x}\,\operatorname{cosec}^4\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> แยก $\operatorname{cosec}^n u = \operatorname{cosec}^{n-2} u \;\; \operatorname{cosec}^2 u$

$$\operatorname{cosec}^4\sqrt{x} = \operatorname{cosec}^2\sqrt{x} \;\; \operatorname{cosec}^2\sqrt{x} \qquad (1)$$

ทำการแปลง $\operatorname{cosec}^4\sqrt{x}$ จากสูตรตรีโกณมิติเบื้องต้น

$$\operatorname{cosec}^2\sqrt{x} = 1+\cot^2\sqrt{x}$$

จากสมการที่ (1) ดังนั้น $\operatorname{cosec}^4\sqrt{x} = \left(1+\cot^2\sqrt{x}\right) \operatorname{cosec}^2\sqrt{x}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cot^3\sqrt{x}\,\operatorname{cosec}^4\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx &= \int \frac{\cot^3\sqrt{x}\left(1+\cot^2\sqrt{x}\right)\operatorname{cosec}^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx \\
&= \int \left(\cot^3\sqrt{x}+\cot^5\sqrt{x}\right)\frac{\operatorname{cosec}^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx \\
&= \int \left(\cot^3\sqrt{x}+\cot^5\sqrt{x}\right)(-2)d\left(\cot\sqrt{x}\right) \\
&= -2\int \left(\cot^3\sqrt{x}+\cot^5\sqrt{x}\right)d\left(\cot\sqrt{x}\right) \\
&= -2\int \left(\cot\sqrt{x}\right)^3 d\left(\cot\sqrt{x}\right) - 2\int \left(\cot\sqrt{x}\right)^5 d\left(\cot\sqrt{x}\right) \\
&= -2\frac{\left(\cot\sqrt{x}\right)^4}{4} - 2\frac{\left(\cot\sqrt{x}\right)^6}{6} + c \\
&= -\frac{1}{2}\cot^4\sqrt{x} - \frac{1}{3}\cot^6\sqrt{x} + c
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.24 จงหาค่า $\int e^x \tan^5 e^x \;\; \sec^7 e^x dx$

<u>วิธีทำ</u> แยก $\tan^m u \sec^n u = \tan^{m-1} u \;\; \sec^{n-1} u \;\; (\tan u \cdot \sec u)$

$$\tan^5 e^x \;\; \sec^7 e^x = \tan^4 e^x \;\; \sec^6 e^x \cdot \left(\tan e^x \;\; \sec e^x\right) \qquad (1)$$

ทำการแปลง $\tan^4 e^x$ จากสูตรตรีโกณมิติเบื้องต้น

$$\tan^2 e^x = \sec^2 e^x - 1$$

จากสมการที่ (1) ดังนั้น

$$\tan^5 e^x \;\; \sec^7 e^x = \left(\sec^2 e^x - 1\right)^2 \;\; \sec^6 e^x \;\; \left(\tan e^x \cdot \sec e^x\right)$$

$$\int e^x \tan^5 e^x \ \sec^7 e^x dx = \int \left(\sec^2 e^x - 1\right)^2 \ \sec^6 e^x \ \left(\tan e^x \ \sec e^x\right) dx$$

$$= \int \left(\sec^4 e^x - 2\sec^2 e^x + 1\right) \ \sec^6 e^x \ \left(\tan e^x \ \sec e^x\right) dx$$

$$= \int \left(\sec^{10} e^x - 2\sec^8 e^x + \sec^6 e^x\right) \cdot d\left(\sec e^x\right)$$

$$= \int \left(\sec e^x\right)^{10} d\left(\sec e^x\right) - 2\int \left(\sec e^x\right)^8 d\left(\sec e^x\right) + \int \left(\sec e^x\right)^6 d\left(\sec e^x\right)$$

$$= \frac{\left(\sec e^x\right)^{11}}{11} - 2\frac{\left(\sec e^x\right)^9}{9} + \frac{\left(\sec e^x\right)^7}{7} + c$$

$$= \frac{1}{11}\sec^{11} e^x - \frac{2}{9}\sec^9 e^x + \frac{1}{7}\sec^7 e^x + c$$

5.3 การหาปริพันธ์โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ

(Integration by trigonometric function substitutions)

ถ้าตัวถูกปริพันธ์อยู่ในรูปแบบทั้ง 6 คือ $a^2 - u^2$, $\sqrt{a^2 - u^2}$, $u^2 + a^2$, $\sqrt{u^2 + a^2}$, $u^2 - a^2$ หรือ $\sqrt{u^2 - a^2}$ และมีนิพจน์อื่น นอกเหนือจากรูปแบบนี้ประกอบอยู่ด้วย เช่น

1. $u^2\sqrt{16 - u^2}$ ซึ่งมีนิพจน์ u^2 ประกอบอยู่ในรูปแบบนอกเหนือทั้ง 6 รูปแบบ
2. $\dfrac{\sqrt{u^2 + 4}}{u^2}$ ซึ่งมีนิพจน์ u^2 ประกอบอยู่ในรูปแบบนอกเหนือทั้ง 6 รูปแบบ
3. $\dfrac{u + 2}{\sqrt{u^2 + 3^2}}$ ซึ่งมีนิพจน์ $u + 2$ ประกอบอยู่ในรูปแบบนอกเหนือทั้ง 6 รูปแบบ

โดยจะแตกต่างจากหัวข้อ 4.2.5 ซึ่งไม่มีพจน์อื่นประกอบอยู่ด้วย

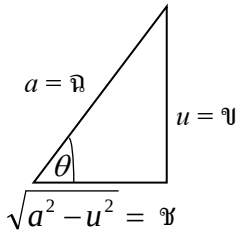
หลักการสำคัญจะต้องสามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบดังกล่าวได้ และจะใช้วิธีการเปลี่ยนตัวแปรเดิมให้เป็นตัวแปรใหม่ที่อยู่ในรูปของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ดังนี้

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้าตัวถูกปริพันธ์อยู่ในรูปแบบ $a^2 - u^2$ หรือ $\sqrt{a^2 - u^2}$

การแทนค่า จะกำหนดให้ $u = a\sin\theta$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ดังแสดงรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จาก $u = a\sin\theta$

หรือ $\sin\theta = \frac{u}{a}$



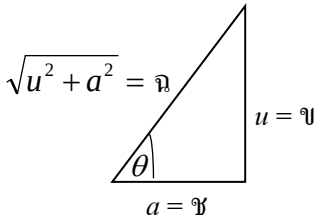
$\sin = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{\text{ข}}{\text{ฉ}}$

<u>กรณีที่ 2</u> ถ้าตัวถูกปริพันธ์อยู่ในรูปแบบ $u^2 + a^2$ หรือ $\sqrt{u^2 + a^2}$

การแทนค่า จะกำหนดให้ $u = a\tan\theta$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ดังแสดงรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จาก $u = a\tan\theta$

หรือ $\tan\theta = \frac{u}{a}$



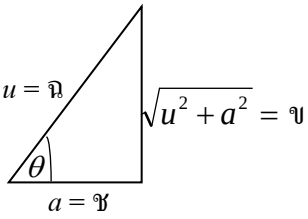
$\tan = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}} = \frac{\text{ข}}{\text{ช}}$

<u>กรณีที่ 3</u> ถ้าตัวถูกปริพันธ์อยู่ในรูปแบบ $u^2 - a^2$ หรือ $\sqrt{u^2 - a^2}$

การแทนค่า จะกำหนดให้ $u = a\sec\theta$ โดยที่ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ หรือ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ดังแสดงรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จาก $u = a\sec\theta$

หรือ $\sec\theta = \frac{u}{a}$



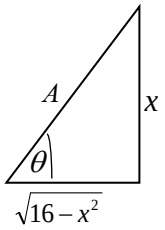
$\sec = \frac{\text{ฉาก}}{\text{ชิด}} = \frac{\text{ฉ}}{\text{ช}}$

ตัวอย่าง 5.25 จงหาค่า $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-x^2}}$

<u>วิธีทำ</u> เป็นกรณีที่ 1 รูปแบบ $\sqrt{a^2-u^2}$ จากโจทย์ $a=4$ และ $u=x$

กำหนดให้ $u = a\sin\theta$ ดังนั้น $x = 4\sin\theta$

$dx = 4\cos\theta\, d\theta$



จากโจทย์ $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-x^2}} = \int \frac{4\cos\theta}{(4\sin\theta)^2\sqrt{16-(4\sin\theta)^2}}d\theta$

$$\sqrt{16-(4\sin\theta)^2} = \sqrt{4^2-4^2\sin^2\theta}$$
$$= \sqrt{4^2(1-\sin^2\theta)}$$
$$= 4\sqrt{(1-\sin^2\theta)}$$
$$= 4\cos\theta$$

$$= \int \frac{\cancel{4\cos\theta}}{16\sin^2\theta\ (\cancel{4\cos\theta})}d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\int \frac{1}{\sin^2\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\int \operatorname{cosec}^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{16}(-\cot\theta)+c$$

$$= -\frac{1}{16}\cot\theta + c$$

$$= -\frac{1}{16}\ \frac{\sqrt{16-x^2}}{x} + c$$

$$\cot = \frac{\text{ชิด}}{\text{ข้าม}} = \frac{\text{ช}}{\text{ข}} = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}$$

ตัวอย่าง 5.26 จงหาค่า $\int \frac{x}{x^2+6x+34}dx$

<u>วิธีทำ</u> ทำการแปลง $x^2+6x+34$ ให้อยู่ในรูปผลรวมทั้งหมดกำลังสอง เนื่องจากเครื่องหมายหน้า $6x$ เป็นบวก เพื่อให้อยู่ในรูป u^2 และ a^2

น^2 + 2นล + ล^2

$$x^2+6x+34=(x)^2+2(x)[3]+[3]^2-[3]^2+34$$

มีการบวกเข้า $[3]^2$ โดยการบังคับจากสูตรจึงต้องทำการ $-[3]^2$

ดังนั้น น = x และ ล = 3

$$x^2+6x+34=(x)^2+2(x)[3]+[3]^2-9+34$$

$$=(x+3)^2+25$$

(น + ล)^2

น^2 + 2นล + ล^2 = (น + ล)^2

$$\therefore\ x^2+6x+34=(x+3)^2+5^2$$

จะได้ $$\int \frac{x}{x^2+6x+34}dx=\int \frac{x}{(x+3)^2+5^2}dx \qquad (1)$$

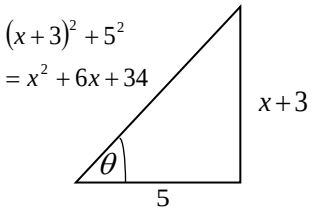
เป็นกรณีที่ 2 รูปแบบ u^2+a^2 จากโจทย์ $u=x+3$ และ $a=5$

กำหนดให้ $u=a\tan\theta$

$$x+3=5\tan\theta \qquad (2)$$

$$x=5\tan\theta-3$$

ดังนั้น $dx=5\sec^2\theta\, d\theta$



จากสมการที่ (1) $$\int \frac{x}{x^2+6x+34}dx=\int \frac{5\tan\theta-3}{(5\tan\theta)^2+5^2}\left(5\sec^2\theta\, d\theta\right)$$

$$(5\tan\theta)^2+5^2=25\tan^2\theta+25$$
$$=25(\tan^2\theta+1)$$
$$=25\sec^2\theta$$

$$=\int \frac{5\tan\theta-3}{\cancel{\sec^2\theta}}\,5\cancel{\sec^2\theta\, d\theta}$$

$$=5\int(5\tan\theta-3)d\theta$$

$$=25\int\tan\theta\, d\theta-15\int 1d\theta$$

$$\int \frac{x}{x^2+6x+34}dx = 25\ln|\sec\theta| - 15\theta + c$$

$$\boxed{\sec = \frac{\text{ฉาก}}{\text{ชิด}} = \frac{\text{ฉ}}{\text{ช}} = \frac{x^2+6x+34}{5}}$$

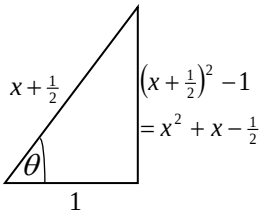
และจากสมการที่ (2) จะได้ $\tan\theta = \dfrac{x+3}{5}$

$$\therefore \theta = \arctan\frac{x+3}{5}$$

ดังนั้น $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+6x+34}dx = 25\ln\left|\frac{x}{x^2+6x+34}\right| - 15\arctan\frac{x+3}{5} + c$

ตัวอย่าง 5.27 จงหาค่า $\displaystyle\int \frac{x+2}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-1\right]^{\frac{3}{2}}}dx$

<u>วิธีทำ</u> เป็นกรณีที่ 3 รูปแบบ u^2-a^2 จากโจทย์ $u = x+\dfrac{1}{2}$ และ $a=1$



กำหนดให้ $u = a\sec\theta$ ดังนั้น $x+\dfrac{1}{2} = \sec\theta$

$$x = \sec\theta - \frac{1}{2}$$

$$dx = \sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

จากโจทย์ $\displaystyle\int \frac{x+2}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-1\right]^{\frac{3}{2}}}dx = \int \frac{\left(\sec\theta-\frac{1}{2}\right)+2}{\left[(\sec\theta)^2-1\right]^{\frac{3}{2}}}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

$$= \int \frac{\sec\theta+\frac{3}{2}}{\left(\tan^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{\sec\theta+\frac{3}{2}}{(\tan\theta)^3}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{\sec\theta+\frac{3}{2}}{(\tan\theta)^2}\sec\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta}d\theta + \frac{3}{2}\int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}d\theta$$

$$\int \frac{x+2}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-1\right]^{\frac{3}{2}}}dx = \int\left(\frac{1}{\cancel{\cos^2\theta}}\ \frac{\cancel{\cos^2\theta}}{\sin^2\theta}\right)d\theta+\frac{3}{2}\int\left(\frac{1}{\cos\theta}\ \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)d\theta$$

$$=\int\frac{1}{\sin^2\theta}d\theta+\frac{3}{2}\int\left(\frac{1}{\sin\theta}\ \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)d\theta$$

$$\cos ec = \frac{\text{ฉาก}}{\text{ข้าม}} = \frac{\text{ฉ}}{\text{ข}} = \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x-\frac{1}{2}}$$

$$\cot = \frac{\text{ชิด}}{\text{ข้าม}} = \frac{\text{ช}}{\text{ข}} = \frac{1}{x^2+x-\frac{1}{2}}$$

$$=\int\cos ec^2\theta\, d\theta+\frac{3}{2}\int\cos ec\theta\cot\theta\, d\theta$$

$$=-\cot\theta+\frac{3}{2}\left(-\cos ec\theta\right)+c$$

$$=-\cot\theta-\frac{3}{2}\cos ec\theta+c$$

$$=-\frac{1}{x^2+x-\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x-\frac{1}{2}}\right)+c$$

$$=-\frac{1}{x^2+x-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{3}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)+c$$

$$=-\frac{1}{x^2+x-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}\right)+c$$

$$=-\frac{1}{x^2+x-\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}\right)+c$$

5.4 การหาปริพันธ์โดยการแยกเป็นเศษส่วนย่อย (Integration by partial functions)

วิธีนี้จะเป็นการหาปริพันธ์ที่อยู่ในรูปของฟังก์ชันตรรกยะ

$$Q(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

หรืออยู่ในรูป $\int\frac{f(x)}{g(x)}dx$ โดยที่ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม

คือ $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$

$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+b_{m-2}x^{m-2}+\ldots+b_2x^2+b_1x+b_0$

เมื่อ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ และ

$b_n, b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_2, b_1, b_0$ เป็นค่าคงที่ใด ๆ

โดย $f(x)$ จะเป็นฟังก์ชันพหุนามกำลัง n ก็ต่อเมื่อ $a_n \neq 0$

และ $g(x)$ จะเป็นฟังก์ชันพหุนามกำลัง m ก็ต่อเมื่อ $b_m \neq 0$

- ถ้า $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้ (Proper rational function) เมื่อกำลังของ $f(x)$ น้อยกว่ากำลังของ $g(x)$ เช่น $\frac{x^2-5x+1}{x^3-1}, \frac{x-2}{(x+3)^2}$

- ถ้า $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้ (Improper rational function) เมื่อกำลังของ $f(x)$ มากกว่าหรือเท่ากับกำลังของ $g(x)$ เช่น $\frac{x^5}{2x^3-5}, \frac{x^6-5x}{(x^2-1)^2}$

ฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้ จะสามารถเขียนอยู่ในรูปผลบวกหรือผลลบของพหุนามกับฟังก์ชันตรรกยะได้เสมอ เช่น $\frac{x^4-x^2+x+5}{x^2-1} = x^2 + \frac{x+5}{x^2-1}$

<u>วิธีการแยกเป็นเศษส่วนย่อย</u>

1. พิจารณาว่าเป็นฟังก์ชันตรรกยะหรือไม่ เนื่องจากวิธีการนี้สามารถทำได้ แต่จะต้องเป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้เท่านั้น

   ถ้าเป็นฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้ ให้นำ $g(x)$ หาร $f(x)$ โดยการตั้งหารแบบพีชคณิตหารก่อน ถ้าได้ผลลัพธ์ คือ $f_1(x) + \frac{f_2(x)}{g(x)}$ ให้นำพจน์ $\frac{f_2(x)}{g(x)}$ ที่เป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้แล้ว ไปทำตามขั้นตอนที่ 2 ต่อไป เช่น $\frac{x^4-x^2+x+5}{x^2-1}$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้จึงต้องทำการแปลงให้เป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้ก่อน

   โดยวิธีการตั้งหาร

$$\begin{array}{r|l} & x^2 \\ \hline x^2-1 & x^4-x^2+x+5 \\ & \underline{x^4-x^2} \\ & \qquad\quad \underline{\underline{x+5}} \end{array}$$

   ผลลัพธ์ คือ $x^2 + \frac{x+5}{x^2-1} = f_1(x) + \frac{f_2(x)}{g(x)}$ และนำ $\frac{x+5}{x^2-1}$

   ซึ่งเป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้ไปทำการแยกเป็นเศษส่วนย่อยขั้นตอนต่อไป

2. นำ $g(x)$ มาแยกตัวประกอบแบ่งได้เป็น 5 กรณี คือ

<u>กรณีที่ 1</u> ตัวประกอบเชิงเส้น (Linear factor) คือตัวประกอบที่มีกำลังสูงสุดของตัวแปรเท่ากับ 1 เช่น

$$g(x)=(5x+1)(x-2)(3x+4)$$

สามารถเขียน $Q(x)$ อยู่ในรูปผลบวกของเศษส่วนย่อยได้ คือ

$$Q(x)=\frac{A}{5x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{3x+4}$$ เมื่อ A, B, C คือ ค่าคงที่ใด ๆ

<u>กรณีที่ 2</u> ตัวประกอบเชิงเส้นซ้ำกัน เช่น

$$g(x)=(x-2)(x-2)(x-2)(x-2)$$

สามารถเขียน $Q(x)$ อยู่ในรูปผลบวกของเศษส่วนย่อยได้ คือ

$$Q(x)=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-2)^3}+\frac{D}{(x-2)^4}$$ เมื่อ A, B, C, D คือ ค่าคงที่ใด ๆ

<u>กรณีที่ 3</u> ตัวประกอบกำลังสอง (Quadratic factor) คือตัวประกอบที่มีกำลังสูงสุดของตัวแปรเท่ากับ 2 เช่น

$$g(x)=(x^2-5x+1)(x^2+1)(x^2-3)$$

สามารถเขียน $Q(x)$ อยู่ในรูปผลบวกของเศษส่วนย่อยได้ คือ

$$Q(x)=\frac{Ax+B}{x^2-5x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{x^2-3}$$ เมื่อ A, B, C, D, E, F คือ ค่าคงที่ใด ๆ

<u>กรณีที่ 4</u> ตัวประกอบกำลังสองซ้ำกัน เช่น

$$g(x)=(x^2-5)(x^2-5)(x^2-5)(x^2-5)$$

สามารถเขียน $Q(x)$ อยู่ในรูปผลบวกของเศษส่วนย่อยได้ คือ

$$Q(x)=\frac{Ax+B}{x^2-5}+\frac{Cx+D}{(x^2-5)^2}+\frac{Ex+F}{(x^2-5)^3}+\frac{Gx+H}{(x^2-5)^4}$$

เมื่อ A, B, C, D, E, F, G, H คือ ค่าคงที่ใด ๆ

<u>กรณีที่ 5</u> ตัวประกอบมีหลากหลายกรณีผสมกัน ให้ทำตามหลักการของแต่ละกรณี

เช่น
$$\frac{x^2+5x-9}{(x-1)(x+2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$$

$$\frac{x^3-5}{(x+1)(x^2+3)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+3}+\frac{Dx+E}{(x^2+3)^2}$$

เมื่อ A, B, C, D, E คือ ค่าคงที่ใด ๆ

3. เมื่อทำการแยกเป็นเศษส่วนย่อยแล้ว จะต้องนำไปหาค่าคงที่ $A, B, C,\ldots$ หรือการหาค่าสัมประสิทธิ์ของเศษผลบวกย่อยทางด้านขวามือ โดยการนำ $g(x)$ คูณเข้าทั้งสองข้างของสมการ จากนั้นให้เลือกใช้วิธีที่เหมาะสม เพื่อหาค่าคงที่หรือสัมประสิทธิ์ดังกล่าว ซึ่งมีวิธีการหาได้หลายวิธี เช่น

   3.1 วิธีการแทนค่าตัวแปรโดยเลือกค่าที่เหมาะสมแล้วแทนใน x ของสมการ

   3.2 วิธีเทียบสัมประสิทธิ์ โดยใช้หลักการเทียบสัมประสิทธิ์ของ x ที่กำลังเท่ากันของทางด้านซ้ายมือกับขวามือของสมการย่อมมีค่าเท่ากันเสมอ

ตัวอย่าง 5.28 จงหาค่า $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)(x+3)}$

<u>วิธีทำ</u> สามารถนำ $\frac{1}{(x+1)(x-2)(x+3)}$ มาแยกเป็นเศษส่วนย่อยได้ เนื่องจากเป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้ ดังนั้น

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3} \qquad (1)$$

นำ $(x+1)(x-2)(x+3)$ คูณทั้งสองข้างของสมการที่ (1)

จะได้ $$1=A(x-2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+C(x+1)(x-2) \qquad (2)$$

หาค่า A,B,C ได้โดยการแทนค่า x ที่เหมาะสมในสมการที่ (2)

พิจารณาค่า x ที่เหมาะสมในสมการที่ (1) คือ $x=-1,\ x=2$ และ $x=-3$

แทนค่า $x=-1$

จะได้ $$1=A(-1-2)(-1+3)+B(-1+1)(-1+3)+C(-1+1)(-1-2)$$

$$1=A(-3)(2)+0+0$$

$$1 = -6A$$

$$\therefore A = -\frac{1}{6}$$

แทนค่า $x = 2$

จะได้ $$1 = A(2-2)(2+3) + B(2+1)(2+3) + C(2+1)(2-2)$$

$$1 = 0 + B(3)(5) + 0$$

$$1 = 15B$$

$$\therefore B = \frac{1}{15}$$

แทนค่า $x = -3$

จะได้ $$1 = A(-3-2)(-3+3) + B(-3+1)(-3+3) + C(-3+1)(-3-2)$$

$$1 = 0 + 0 + C(-2)(-5)$$

$$1 = 10C$$

$$\therefore C = \frac{1}{10}$$

แทนค่า $A = -\frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{15}$ และ $C = \frac{1}{10}$ ในสมการที่ (1)

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)(x+3)} = -\frac{1}{6(x+1)} + \frac{1}{15(x-2)} + \frac{1}{10(x+3)}$$

ดังนั้น $$\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)(x+3)} = \int \frac{1}{(x+1)(x-2)(x+3)} dx$$

$$= \int \left(-\frac{1}{6(x+1)} + \frac{1}{15(x-2)} + \frac{1}{10(x+3)} \right) dx$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)(x+3)} = -\frac{1}{6}\int \frac{1}{(x+1)}d(x+1)+\frac{1}{15}\int \frac{1}{(x-2)}d(x-2)+\frac{1}{10}\int \frac{1}{(x+3)}d(x+3)$$

$$= -\frac{1}{6}\ln|x+1|+\frac{1}{15}\ln|x-2|+\frac{1}{10}\ln|x+3|+c$$

ตัวอย่าง 5.29 จงหาค่า $\int \frac{2x^2-3x+4}{(x+1)(x-2)^2}dx$

<u>วิธีทำ</u> สามารถนำ $\frac{2x^2-3x+4}{(x+1)(x-2)^2}$ มาแยกเป็นเศษส่วนย่อยได้ เนื่องจากเป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้

ดังนั้น $$\frac{2x^2-3x+4}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2} \qquad (1)$$

นำ $(x+1)(x-2)^2$ คูณทั้งสองข้างของสมการที่ (1)

จะได้ $$2x^2-3x+4 = A(x-2)^2+B(x+1)(x-2)+C(x+1) \qquad (2)$$

หาค่า A,B,C ได้โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ในสมการที่ (2)

$$2x^2-3x+4 = A(x^2-4x+4)+B(x^2-x-2)+C(x+1)$$

$$= (A+B)+(-4A-B+C)x+(4A-2B+C)$$

หาค่า A,B,C จาก

$$A+B = 2 \qquad (3)$$

$$-4A-B+C = -3 \qquad (4)$$

$$4A-2B+C = 4 \qquad (5)$$

นำสมการที่ (4)-(5) เพื่อกำจัด C

$$-8A+B = -7 \qquad (6)$$

นำสมการที่ (3)-(6) เพื่อกำจัด B

$$9A = 9$$

$$\therefore A = 1$$

นำ $A = 1$ แทนในสมการที่ (3)

จะได้ $$1 + B = 2$$

$$\therefore B = 1$$

นำ $A = 1$ และ $B = 1$ แทนในสมการที่ (4) เพื่อหาค่า C

$$-4(1) - 1 + C = -3$$

$$\therefore C = 2$$

แทนค่า $A = 1$, $B = 1$ และ $C = 2$ ในสมการที่ (1)

$$\frac{2x^2 - 3x + 4}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}$$

ดังนั้น $$\int \frac{2x^2 - 3x + 4}{(x+1)(x-2)^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} \right) dx$$

$$= \int \frac{1}{x+1}\,d(x+1) + \int \frac{1}{x-2}\,d(x-2) + 2\int (x-2)^{-2}\,d(x-2)$$

$$= \ln|x+1| + \ln|x-2| + 2\frac{(x-2)^{-1}}{-1} + c$$

$$= \ln|x+1| + \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + c$$

ตัวอย่าง 5.30 จงหาค่า $\int \frac{2x^2-1}{x^4+x^3}dx$

<u>วิธีทำ</u> สามารถนำ $\frac{2x^2-1}{x^4+x^3}$ มาแยกเป็นเศษส่วนย่อยได้ เนื่องจากเป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้ และจะต้องทำการแยกตัวประกอบในส่วนของ $x^4+x^3=x^3(x+1)$ ก่อน

ดังนั้น
$$\frac{2x^2-1}{x^4+x^3}=\frac{2x^2-1}{x^3(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x+1} \qquad (1)$$

นำ $x^3(x+1)$ คูณทั้งสองข้างของสมการที่ (1)

จะได้
$$2x^2-1 = Ax^2(x+1)+Bx(x+1)+C(x+1)+Dx^3 \qquad (2)$$

หาค่า A,B,C และ D ได้โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ในสมการที่ (2)

$$2x^2-1 = A(x^3+x^2)+B(x^2+x)+C(x+1)+D(x^3)$$

$$2x^2-1=(A+D)x^3+(A+B)x^2+(B+C)x+C$$

หาค่า A,B,C และ D จาก

$$A+D = 0 \qquad (3)$$

$$A+B = 2 \qquad (4)$$

$$B+C = 0 \qquad (5)$$

จากสมการที่ (5) จะได้ $\therefore C = -1$

นำ $C = -1$ แทนในสมการที่ (5)

$$B+(-1) = 0$$
$$\therefore B = 1$$

นำ $B = 1$ แทนในสมการที่ (4)

$$A+1 = 2$$
$$\therefore A = -1$$

นำ $A = -1$ แทนในสมการที่ (3)

$$-1+D = 0$$

$$\therefore D = 1$$

แทนค่า $A=-1,\ B=1,\ C=-1$ และ $D=1$ ในสมการที่ (1)

$$\frac{2x^2-1}{x^4+x^3} = -\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x+1}$$

ดังนั้น
$$\int \frac{2x^2-1}{x^4+x^3}dx = \int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= -\int\frac{1}{x}d\,x+\int x^{-2}d\,x-\int x^{-3}dx+\int\frac{1}{(x+1)}d(x+1)$$

$$= -\ln|x|+\frac{x^{-1}}{-1}-\frac{x^{-2}}{-2}+\ln|x+1|+c$$

$$= -\ln|x|-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\ln|x+1|+c$$

ตัวอย่าง 5.31 จงหาค่า $\int\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx$

<u>วิธีทำ</u> สามารถนำ $\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}$ มาแยกเป็นเศษส่วนย่อยได้ เนื่องจากเป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้ และจะต้องทำการแยกตัวประกอบในส่วนของ $x^4+3x^2+2=(x^2+2)(x^2+1)$ ก่อน

ดังนั้น
$$\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}=\frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+2)(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{(x^2+2)}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)} \quad (1)$$

นำ $(x^2+2)(x^2+1)$ คูณทั้งสองข้างของสมการที่ (1)

จะได้
$$x^3+x^2+x+2 = (Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+2)$$

$$= Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx^3+2Cx+Dx^2+2D$$

$$= (A+C)x^3+(B+D)x^2+(A+2C)x+(B+2D) \qquad (2)$$

หาค่า A,B,C และ D ได้โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ในสมการที่ (2)

$$A+C = 1 \qquad (3)$$

$$B+D = 1 \qquad (4)$$

$$A+2C = 1 \qquad (5)$$

$$B+2D = 2 \qquad (6)$$

นำสมการที่ (5)-(3) เพื่อกำจัด A

จะได้ $\therefore C = 0$

นำ $C = 0$ แทนในสมการที่ (1)

$$A+0 = 1$$

$$\therefore A = 1$$

นำสมการที่ (6)-(4) เพื่อกำจัด B

$$\therefore D = 1$$

นำ $D = 1$ แทนในสมการที่ (4)

$$B+1 = 1$$

$$\therefore B = 0$$

แทนค่า $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$ และ $D = 1$ ในสมการที่ (1)

$$\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2} = \frac{x}{x^2+2}+\frac{1}{x^2+1}$$

ดังนั้น

$$\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}\,dx = \int\left(\frac{x}{x^2+2}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \int \frac{x}{x^2+2}dx+\int \frac{1}{x^2+1}dx$$

$$= \int \frac{1}{\left(x^2+2\right)}\frac{d\left(x^2+2\right)}{2}+\int \frac{dx}{x^2+1^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right|+\arctan x+c$$

ตัวอย่าง 5.32 จงหาค่า $\int \frac{x^3-4x}{(x^2+1)^2}dx$

<u>วิธีทำ</u> สามารถนำ $\frac{x^3-4x}{(x^2+1)^2}$ มาแยกเป็นเศษส่วนย่อยได้ เนื่องจากเป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้ และจะต้องทำการแยกตัวประกอบในส่วนของ $(x^2+1)^2$ ก่อน

ดังนั้น $$\frac{x^3-4x}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} \qquad (1)$$

นำ $(x^2+1)^2$ คูณทั้งสองข้างของสมการที่ (1)

จะได้ $$x^3-4x = (Ax+B)(x^2+1)+Cx+D \qquad (2)$$

หาค่า A,B,C และ D ได้โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ในสมการที่ (2)

$$x^3-4x = Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx+D$$

$$= Ax^3+Bx^2+(A+C)x+(B+D)$$

หาค่า A,B,C และ D ได้โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ในสมการที่ (2)

$$\therefore A = 1 \qquad (3)$$

$$\therefore B = 0 \qquad (4)$$

$$A+C = -4 \qquad (5)$$

$$B+D = 0 \qquad (6)$$

นำ $A = 1$ แทนในสมการที่ (5)

$$1+C = -4$$

$$\therefore C = -5$$

นำ $B = 0$ แทนในสมการที่ (6)

$$0+D = 0$$

$$\therefore D = 0$$

แทนค่า $A=1,\ B=0,\ C=-5$ และ $D=0$ ในสมการที่ (1)

$$\frac{x^3-4x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x}{x^2+1}-\frac{5x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3-4x}{\left(x^2+1\right)^2}dx &= \int\left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{5x}{\left(x^2+1\right)^2}\right)dx \\
&= \int\left(\frac{x}{x^2+1}\right)dx-\int\frac{5x}{\left(x^2+1\right)^2}dx \\
&= \int\frac{1}{x^2+1}\frac{d\left(x^2+1\right)}{2}-5\int\left(x^2+1\right)^{-2}\frac{d\left(x^2+1\right)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right|-\frac{5}{2}\frac{\left(x^2+1\right)^{-1}}{-1}+c \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right|+\frac{5}{x^2+1}+c
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.33 จงหาค่า $\int\frac{2x^2-9x-9}{x^3-9x}dx$

<u>วิธีทำ</u> สามารถนำ $\frac{2x^2-9x-9}{x^3-9x}$ มาแยกเป็นเศษส่วนย่อยได้ เนื่องจากเป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้ และจะต้องทำการแยกตัวประกอบในส่วนของ $x^3-9x=x\left(x^2-9\right)$ ก่อน

ดังนั้น $$\frac{2x^2-9x-9}{x^3-9x} = \frac{2x^2-9x-9}{x\left(x^2-9\right)} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2-9} \qquad (1)$$

นำ $x\left(x^2-9\right)$คูณทั้งสองข้างของสมการที่ (1)

จะได้ $$2x^2-9x-9 = A\left(x^2-9\right)+\left(Bx+C\right)x \qquad (2)$$

หาค่า A, B และ C ได้โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ในสมการที่ (2)

$$\begin{aligned}
2x^2-9x-9 &= Ax^2-9A+Bx^2+Cx \\
&= \left(A+B\right)x^2+Cx-9A
\end{aligned}$$

หาค่า A, B และ C จาก

$$A+B = 2 \qquad (3)$$

$$\therefore\ C = -9 \qquad (4)$$

$$-9A = -9 \qquad (5)$$

จากสมการที่ (5)

$$\therefore\ A = 1$$

นำ $A = 1$ แทนในสมการที่ (3)

$$1+B = 2$$

$$\therefore\ B = 1$$

แทนค่า $A = 1,\ B = 1$ และ $C = -9$ ในสมการที่ (1)

$$\frac{2x^2-9x-9}{x^3-9x} = \frac{1}{x}+\frac{x-9}{x^2-9}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^2-9x-9}{x^3-9x}dx &= \int\left(\frac{1}{x}+\frac{x-9}{x^2-9}\right)dx \\
&= \int\frac{1}{x}dx+\int\frac{x-9}{x^2-9}dx \\
&= \int\frac{1}{x}dx+\int\frac{x}{x^2-9}dx-\int\frac{9}{x^2-9}dx \\
&= \int\frac{1}{x}dx+\int\frac{1}{x^2-9}\frac{d\left(x^2-9\right)}{2}-9\int\frac{dx}{x^2-3^2} \\
&= \ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2-9\right|-9\cdot\frac{1}{2(3)}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+c \\
&= \ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2-9\right|-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+c
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.34 จงหาค่า $\int \frac{2x^4+2x^3+x^2+3x-6}{x^3-x^2+x-1}dx$

<u>วิธีทำ</u> ไม่สามารถนำ $\frac{2x^4+2x^3+x^2+3x-6}{x^3-x^2+x-1}$ มาแยกเป็นเศษส่วนย่อยได้ เนื่องจากเป็นฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้ จึงจำเป็นต้องตั้งหารแบบพีชคณิตก่อน

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 2x + 4 \\
x^3-x^2+x-1 & 2x^4+2x^3+x^2+3x-6 \\
 & \underline{2x^4-2x^3+2x^2-2x} \\
 & \quad 4x^3-x^2+5x-6 \\
 & \quad \underline{4x^3-4x^2+4x-4} \\
 & \qquad \underline{\underline{3x^2+x-2}}
\end{array}
$$

$$\therefore \frac{2x^4+2x^3+x^2+3x-6}{x^3-x^2+x-1} = 2x+4 + \frac{3x^2+x-2}{x^3-x^2+x-1}$$

สามารถนำ $\frac{3x^2+x-2}{x^3-x^2+x-1}$ มาแยกเป็นเศษส่วนย่อยได้ เนื่องจากเป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้ และจะต้องทำการแยกตัวประกอบในส่วนของ $\frac{3x^2+x-2}{x^3-x^2+x-1}$ ก่อน

ดังนั้น $$\frac{3x^2+x-2}{x^3-x^2+x-1} = \frac{3x^2+x-2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1} \qquad (1)$$

นำ $(x-1)(x^2+1)$ คูณทั้งสองข้างของสมการที่ (1)

จะได้ $$3x^2+x-2 = A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1) \qquad (2)$$

หาค่า A, B และ C ได้โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ในสมการที่ (2)

$$\begin{aligned} 3x^2+x-2 &= Ax^2+A+Bx^2-Bx+Cx-C \\ &= (A+B)x^2+(-B+C)x+A-C \end{aligned}$$

หาค่า A, B และ C จาก

$$A+B = 3 \qquad (3)$$

$$-B+C = 1 \qquad (4)$$

$$A-C = -2 \qquad (5)$$

นำสมการที่ (3)+(4) เพื่อกำจัด B

$$A+C = 4 \qquad (6)$$

นำสมการที่ (5)+(6) เพื่อกำจัด C

$$2A = 2$$

$$\therefore\ A = 1$$

นำ $A = 1$ แทนในสมการที่ (3)

$$1+B = 3$$

$$\therefore\ B = 2$$

นำ $B = 2$ แทนในสมการที่ (4)

$$-2+C = 1$$

$$\therefore\ C = 3$$

แทนค่า $A = 1,\ B = 2$ และ $C = 3$ ในสมการที่ (1)

$$\frac{3x^2+x-2}{x^3-x^2+x-1} = \frac{1}{x-1}+\frac{2x+3}{x^2+1}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int\frac{3x^2+x-2}{x^3-x^2+x-1}\,dx &= \int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2x+3}{x^2+1}\right)dx \\ &= \int\frac{1}{x-1}dx+2\int\frac{x}{x^2+1}dx+3\int\frac{1}{x^2+1}dx \\ &= \int\frac{1}{(x-1)}d(x-1)+2\int\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\frac{d(x^2+1)}{2}+3\int\frac{dx}{x^2+1^2} \\ &= \ln|x-1|+\ln|x^2+1|+3\arctan x+c\end{aligned}$$

บทสรุป

เทคนิคการหาปริพันธ์ ใช้สำหรับโจทย์อินทิเกรตที่มีความยุ่งยากซับซ้อนมากขึ้น เนื่องจากไม่สามารถหาได้จากวิธีใช้สูตรพื้นฐานในบทที่แล้ว โดยวิธีต่าง ๆ ดังนี้

1. การหาปริพันธ์โดยการแยกทีละส่วน
2. การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่มีรูปแบบแน่นอน
3. การหาปริพันธ์โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ
4. การหาปริพันธ์โดยการแยกเป็นเศษส่วนย่อย

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5

1. จงหาปริพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $\int x^2 \sin x\, dx$

1.2 $\int x^2 \ln x\, dx$

1.3 $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$

1.4 $\int (\ln x^3)\, dx$

1.5 $\int \frac{x^3}{(x^2+1)^2}\, dx$

1.6 $\int x^5 e^{x^3}\, dx$

1.7 $\int x e^{3x}\, dx$

1.8 $\int (2-5x)\cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$

1.9 $\int x^2 e^{-x}\, dx$

1.10 $\int (1-x^2) e^{3x} dx$

1.11 $\int \frac{x e^x}{(e^x+1)^2}\, dx$

1.12 $\int e^{-x} \cos 2x\, dx$

1.13 $\int (x^2+2x)\sin x\, dx$

1.14 $\int (3x^2-x) e^{2x-1} dx$

1.15 $\int \arcsin(-2x)\, dx$

1.16 $\int e^{(1-x)} \sin(2x+1) dx$

1.17 $\int (x-3)^2 e^{-x}\, dx$

1.18 $\int x \cos(x^2-2)\, dx$

1.19 $\int \cos(\ln x)\, dx$

1.20 $\int x \sec^2 x\, dx$

2. จงหาปริพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

2.1 $\int \sin^5 x dx$

2.2 $\int \cos^2 x dx$

2.3 $\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx$

2.4 $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$

2.5 $\int \sin^{\frac{3}{2}} x \cos x dx$

2.6 $\int \sin^3 x \cos^{-6} x dx$

2.7 $\int \sin 5x \cos x dx$

2.8 $\int \cos 3x \cos 2x dx$

2.9 $\int \sin 5x \sin x dx$

2.10 $\int \sin x \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$

2.11 $\int \tan^3 x \sec^4 x dx$

2.12 $\int \tan^4 4x dx$

2.13 $\int \cot^6 x dx$

2.14 $\int \cot^{-7} 2x \operatorname{cosec}^4 2x dx$

2.15 $\int \tan^{\frac{5}{2}} 3x \sec^4 3x dx$

2.16 $\int \operatorname{cosec}^6\left(\frac{x}{3}\right) dx$

2.17 $\int \sec^4 2x dx$

2.18 $\int \cot^5 x \operatorname{cosec}^5 x dx$

3. จงหาปริพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

3.1 $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx$

3.2 $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x} dx$

3.3 $\int \frac{dx}{x\sqrt{3+8x}}$

3.4 $\int \frac{dx}{4x^2+9}$

3.5 $\int \frac{\sqrt{\ln^2 x - 25}}{x} dx$

3.6 $\int \sqrt{x^2+16} dx$

3.7 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+11}}$

3.8 $\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$

3.9 $\int \sqrt{8-4x-x^2} dx$

3.10 $\int \frac{dx}{x(4+\ln^2 x)}$

3.11 $\int \sqrt{x^2+4x}dx$

3.12 $\int \frac{dx}{x-x\ln^2 x}$

4. จงหาปริพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

4.1 $\int \frac{3x^2+3x-2}{x^3-x}dx$

4.2 $\int \frac{7x^2-5x+1}{x(x^2-1)}dx$

4.3 $\int \frac{x^3-4x-1}{x(x-1)^3}dx$

4.4 $\int \frac{5x^2+6x+2}{(x+2)(x^2+2x+5)}dx$

4.5 $\int \frac{2x^3-x^2-2}{x^4+3x^2+2}dx$

4.6 $\int \frac{x^3+x^2+x+3}{(x^2+1)(x^2+3)}dx$

4.7 $\int \frac{x^2-10}{2x^4+9x^2+4}dx$

4.8 $\int \frac{2x^4+2x^3+x^2+3x-6}{(x-1)(x^2+1)}dx$

4.9 $\int \frac{2x^3}{(x^2+1)^2}dx$

4.10 $\int \frac{x^2+x-2}{3x^3-x^2+3x-1}dx$

เอกสารอ้างอิง

ดำรงค์ ทิพย์โยธา, ยุวรีย์ พันธ์กล้า และณัฏฐนาถ ไตรภพ (2547). **แคลคูลัส 1**. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2549). **ศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน**. (พิมพ์ครั้งที่ 9). กรุงเทพมหานคร : ราชบัณฑิตยสถาน.

วิรัตน์ สุวรรณาภิชาติ. (2555). **แคลคูลัส 1.** (พิมพ์ครั้งที่ 4). กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

อรอนงค์ บุญคล่อง. (2557). **แคลคูลัส 1**. (พิมพ์ครั้งที่ 5). กรุงเทพมหานคร : ทริปเพิ้ลเอ็ดดูเคชั่น.

William L. Briggs, Denver L. Cochran and Eric L. Schulz. (2013). **Calculus for Scientists and Engineers.** (1st ed.). USA: Pearson Education, Inc.